

ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΘΕΣΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ

Μια κατανομή ποσοτικής μεταβλητής μπορεί να εκπροσωπηθεί από ορισμένες τιμές της μεταβλητής.

Οι τιμές αυτές καλούνται **παράμετροι θέσης** ή **μέτρα κεντρικής θέσης** και μπορούν να αποδώσουν συνοπτικά, μέχρι ένα σημείο, μια κεντρική εικόνα της κατανομής.

Πιο διαδεδομένη είναι η **μέση (αριθμητική) τιμή** που είναι γνωστή και ως **μέσος όρος**. Θα παρουσιάσουμε επίσης τη **διάμεσο** και την **επικρατούσα τιμή**.

μέση (αριθμητική) τιμή (mean value)

Η μέση αριθμητική τιμή ή μέσος όρος προκύπτει από το πηλίκο διαίρεσης του αθροίσματος των τιμών μιας μεταβλητής δια του συνολικού πλήθους τους, δηλαδή του συνόλου των συχνοτήτων τους.

Η μέση τιμή, $\bar{x}$, π.χ. των βαθμών 12, 13, 15, 16, 18 είναι:

$$\bar{x} = \frac{12+13+15+16+18}{5} = 14,8$$

Στην προηγούμενη περίπτωση κάθε τιμή της μεταβλητής: βαθμός είχε συχνότητα ίση με τη μονάδα. Στην πράξη οι τιμές των μεταβλητών έχουν συχνά συχνότητα μεγαλύτερη της μονάδας.

1. μέση τιμή διακριτής μεταβλητής

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε τη μέση βαθμολογία 125 μαθητών. Προφανώς ορισμένοι βαθμοί αντιστοιχούν σε περισσότερους από ένα μαθητές. Αντί λοιπόν να αθροίσουμε 125 βαθμούς μπορούμε να προσθέσουμε τα γινόμενα κάθε βαθμού επί τον αριθμό των μαθητών που τον έλαβαν.

Πίνακας 1. Κατανομή βαθμολογίας

Βαθμολογία	Αριθμός μαθητών	
X_i	V_i	$V_i X_i$
10	2	20
12	10	120
13	16	208
14	22	308
15	36	540
16	20	320
17	9	153
18	3	54
19	2	38
20	1	20
Σύνολο	125	1825

Η μέση τιμή της βαθμολογίας είναι ίση με το σύνολο των βαθμών δια του συνόλου του αριθμού των μαθητών.

$$\bar{x} = \frac{1825}{125} = 14,6$$

Ο μέσος βαθμός είναι λοιπόν 14,6.

Η μέση τιμή εκφράζεται της μονάδες της αντίστοιχης μεταβλητής.

Αν η μεταβλητή μιας κατανομής εκφράζει την ηλικία σε έτη, η μέση τιμή εκφράζεται σε έτη (με ακέραιη ή δεκαδική μορφή). Αν εκφράζει την επιφάνεια σε τετραγωνικά μέτρα, η μέση τιμή εκφράζεται σε τ.μ. (με ακέραιη ή δεκαδική μορφή).

1.2 μέση τιμή συνεχούς μεταβλητής

Σε μια κατανομή συνεχούς μεταβλητής υποθέτουμε ότι οι περιπτώσεις που αντιστοιχούν σε κάθε κλάση κατανέμονται ομοιόμορφα στο εσωτερικό των κλάσεων, ανάμεσα της τιμές των άκρων. Αν, για παράδειγμα, στην κλάση [450,500) € αντιστοιχεί η συχνότητα 10, υποθέτουμε σε κάθε τμήμα της κλάσης, [450,460), [460,470), [470,480), [480,490), [490,500) αντιστοιχούν 2 περιπτώσεις και ότι επιπλέον στο τμήμα [450,455) αντιστοιχεί 1 περίπτωση, στο τμήμα [455,460) αντιστοιχεί 1 περίπτωση κ.ο.κ.

Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής, σε μια συνεχή κατανομή, κάνουμε την παραδοχή ότι κάθε κλάση μπορεί να εκπροσωπηθεί από το κέντρο της, που είναι το ημιάθροισμα των άκρων της.

Πίνακας 12. Κατανομή μισθοδοσίας

μισθός σε €	Κέντρο κλάσης	Αριθμός μισθωτών	
	X_i	V_i	$X_i V_i$
[500,580)	540	5	2700
[580,660)	620	10	6200
[660,740)	700	16	11220
[740,820)	780	20	15600
[820,900)	860	40	34400
[900,980)	940	32	30080
[980,1060)	1020	25	25500
[1060,1140)	1100	8	8800
[1140,1220)	1180	4	4720
Σύνολο		160	139.200

Ο μέσος μισθός είναι ίσος με το πηλίκο των 139.200 € δια των 160 μισθωτών, δηλαδή

$$\bar{x} = \frac{139200}{160} = 870 \text{ €}$$

Στις δύο παραπάνω κατανομές οι τιμές της μεταβλητής που υπεισέρχονται της υπολογισμούς συμβολίζονται με x_i , οι συχνότητες με v_i και τα γινόμενα κάθε τιμής της μεταβλητής επί την αντίστοιχη συχνότητα με $x_i \cdot v_i$.
 Με το σύμβολο Σ δηλώνουμε το άθροισμα.
 Επομένως ο τύπος της μέσης τιμής γίνεται

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot v_i}{\sum v_i}$$

Διάμεσος κατανομής

Διάμεσος μιας κατανομής διακριτής κατανομής είναι η **τιμή της μεσαίας παρατήρησης** του συνόλου των διατεταγμένων τιμών της μεταβλητής κατά αύξουσα τάξη, όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός, ή το ημιάθροισμα των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι άρτιος αριθμός.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Παρουσιάζουμε κατά αύξουσα τάξη τις τιμές βαθμολογίας σε τέσσερις κατανομές. Της δύο πρώτες κατανομές το πλήθος των τιμών είναι άρτιο και της δύο τελευταίες περιττό. Οι ενδιάμεσες τιμές δηλώνονται με έντονους χαρακτήρες.

10 12 13 **14** 16 18 19

11 12 13 **14** 14 15 16

11 12 13 **14 14** 15 16 19

11 12 13 **14 15** 15 16 18

Σύμφωνα με όσα είπαμε, η διάμεσος της τρεις πρώτες κατανομές είναι ίση με 14, ενώ η διάμεσος της τέταρτης κατανομής είναι ίση με 14,5.

Η διάμεσος μιας συνεχούς κατανομής υπολογίζεται, μετά την κατασκευή της αθροιστικής κατανομής, με τη βοήθεια της απλής μεθόδου των τριών.

Στην αθροιστική κατανομή της μισθοδοσίας των 160 υπαλλήλων στην οποία αναφερθήκαμε προηγουμένως, αναζητούμε την αμοιβή που αντιστοιχεί στον 80ο μισθωτό.

Πίνακας 3. Αθροιστική κατανομή μισθοδοσίας

Μεταβλητή	Συχνότητα	Αθρ.Συχνότητα
[500,580)	5	5
[580,660)	10	15
[660,740)	16	31
[740,820)	20	51
[820,900)	40	91
[900,980)	32	123
[980,1060)	25	148
[1060,1140)	8	156
[1140,1220)	4	160

Παρατηρούμε ότι η αμοιβή του βρίσκεται στο διάστημα από 820 έως 900 € μέχρι 820 € λαμβάνουν 51 μισθωτοί. Οι εναπομένοντες 29 (μέχρι τους 80)

πρέπει να αναζητηθούν μεταξύ των 40 της κλάσης 820 έως 900 € και εφόσον έχουμε υποθέσει ότι τα άτομα κάθε κλάσης διαμοιράζονται αναλογικά το ποσό που είναι ίσο με το εύρος της κλάσης (80 €), ο 29ος μισθωτός θα λαμβάνει, επιπλέον των 820 €, τα $29/40$ των $900 - 820 = 80$ €, δηλαδή 58 €. Η διάμεσος αμοιβή θα είναι, επομένως, ίση με $820 + 58 = 878$ €.

Η διάμεσος είναι η τιμή της μεταβλητής εκείνη που χωρίζει μια κατανομή σε δύο ίσα μέρη κατά τέτοιο τρόπο ώστε όσα «άτομα» της κατανομής αντιστοιχούν σε τιμές της μεταβλητής μεγαλύτερες της διαμέσου να ίσα με εκείνα στα οποία αντιστοιχούν τιμές της μεταβλητής μικρότερες της διαμέσου. Στην προηγούμενη κατανομή η μέση τιμή ήταν 870 € και η διάμεσος 878 €, δηλαδή μια παραπλήσια τιμή.

Η κατανομή λοιπόν μπορεί να εκπροσωπηθεί από τη μία ή την άλλη κεντρική τιμή. Αυτό συμβαίνει όταν οι ακραίες τιμές της μεταβλητής είναι μικρότερες των ενδιαμέσων και υπάρχει μια κλιμάκωση τιμών προς μια μέγιστη τιμή και στη συνέχεια μια αποκλιμάκωση προς μικρότερες τιμές.

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση της βαθμολογίας 5 μαθητών με βαθμούς 10, 10, 11, 19, 20. Σύμφωνα με όσα έχουν προηγηθεί η μέση τιμή της βαθμολογίας είναι 14 και ο διάμεσος βαθμός είναι ο 11. Ποιος από τους δύο βαθμούς είναι καλύτερος εκπρόσωπος της βαθμολογίας; Το 14 ανταποκρίνεται στο ρόλο της μέσης τιμής, αλλά παρατηρούμε ότι υπάρχουν 3 μαθητές με μικρότερο βαθμό και 2 με πολύ μεγαλύτερο.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση η μέση τιμή δεν αντιπροσωπεύει με μεγάλη επιτυχία την κατανομή. Η διάμεσος μας πληροφορεί ότι υπάρχουν δύο μαθητές με βαθμό μικρότερο του 11 και άλλοι τόσοι με βαθμό μεγαλύτερο απ' αυτόν. Αυτό δίνει καλύτερα την εικόνα της ιδιαίτερης αυτής βαθμολογίας, με τους περισσότερους (3 στους 5) μαθητές να έχουν χαμηλούς βαθμούς, ενώ ένας μέσος όρος ίσος με 14 δεν πληροφορεί για το πώς οι βαθμοί κατανέμονται. μέση τιμή 14 θα είχε και η βαθμολογία 13, 13, 14, 15, 15.

Επικρατούσα τιμή μιας κατανομής διακριτής μεταβλητής

Επικρατούσα τιμή μιας κατανομής διακριτής κατανομής είναι η τιμή που εμφανίζεται περισσότερες φορές, δηλαδή η τιμή (ή οι τιμές) που αντιστοιχούν στη μεγαλύτερη συχνότητα.

Κατανομή βαθμολογίας Α		Κατανομή βαθμολογίας Β	
Βαθμοί μαθητές		Βαθμοί μαθητές	
11	3	12	5
12	5	13	6
13	8	14	9
15	12	15	9
17	4	17	8
18	2	19	1

Στην πρώτη κατανομή επικρατούσα τιμή είναι ο βαθμός 15, ενώ στη δεύτερη επικρατούσα τιμή είναι οι βαθμοί 14 και 15.